Знаковое моделирование в обучении детей математике

С.Р. Когаловский,
Е.Р. Гурбатова

По одному из разработанных А.Н. Леонтьевым положений следует, что принцип предметности является ядром психологической теории деятельности. Предмет выступает в качестве модели объекта. Таким образом, идея моделирования выражает само существо принципа предметности.

Мышление есть процесс «непрерывно совершающегося обратимого перевода информации с собственно психологического языка пространственно-предметных структур... т.е. языка образов, на психолингвистический, символически-операторный язык» [1, с. 134], язык знаков. Это значит, что моделирование присуще самой при-роде мышления, что оно рождается и развивается вместе с рождением и развитием символически-операторных, знаковых средств.

Знаковое моделирование служит и средством достижения и удержания в сознании целостности предмета рассмотрения, и средством его преобразований, и средством восхождений к метауровневым рассмотрениям, и средством выражения программы действий, и т. д. Едва ли возможно найти сколь-нибудь значимые аспекты учебной математической деятельности, которые обходились бы без использования соответствующих форм знакового опосредствования.

В процессе освоения знаковых систем их роли изменяются: вводимые как орудия математической деятельности, они становятся орудиями преобразования самой этой деятельности, орудиями ее развития, способствующими рождению, в частности, таких новообразований, как преображение подходов от частей – к целому и от частного – к общему в принцип от целого – к частям, от общего – к частному [3, 7].

Развитие способности учащихся к знаковому моделированию в немалой степени способствует их математическому, а с ним – и общему умственному развитию. С другой стороны, истоком трудностей в обучении математике уже в начальной школе является «неумение кодировать (декодировать) информацию, представленную знаково-символическими средствами, идентифицировать изображение с реальностью... выделять в моделях закономерности... оперировать моделями, знаково-символическими средствами. Эти умения начинают складываться задолго до школы и являются необходимыми при переходе к систематическому обучению, основанному на использовании различных знаково-символических средств» [2]. Отсюда ясно, что **вопросы обучения младших школьников и дошкольников знаковому моделированию являются важными вопросами методики математики**.

Приобщение детей к знаковому моделированию естественно начинать **с наглядного моделирования**, основанного на использовании иконических знаков. Этому и следуют авторы учебников математики для начальной школы (и пособий для дошкольников). Представленные в этих учебниках методики приобщения к знаковому моделированию различаются не только «траекториями» восхождения к символическому моделированию, но и наборами образцов такого моделирования: если почти для всех учебников характерно использование разнообразных форм знакового моделирования, то комплект учебников В.В. Давыдова, С.Ф. Горбова и др. отличает единая форма, превращающаяся в универсальную.

Особняком стоит заслуживающий самого пристального внимания подход А. Лобока, характеризуемый им самим следующим образом: «Символические числовые обозначения появляются на нашем уроке как совершенно случайные. Но зато у них с самого начала есть некий графический коррелят: есть конкретные клеточные ряды, обозначаемые соответствующими символами. А у ребенка шаг за шагом начинает накапливаться некий эмпирический опыт "переживания символа". При этом не реальность "подгоняет" мир символов (как это происходит в традиционной системе обучения), а мир символов появляется в процессе математического описания некой модельной реальности, каковой выступает у нас клеточная сетка» [5].

В качестве распространенных способов приобщения к знаковому моделированию укажем **«полимоделирование»**, характеризуемое разнообразием форм, и **«мономоделирование»**, которому свойственна единая форма моделирования. Каждый способ имеет свои несомненные достоинства.

Первый из них хорошо воспринимается детьми, в том числе и дошкольникам. Приобщение ко второму требует достаточно длительной работы, но, будучи освоенным, он позволяет решать сложные текстовые задачи так же легко, как и простые. Более того, освоенная форма мономоделирования становится и средством ориентировки, и широко применяемым объяснительным средством.

Обратимся к задаче, с которой можно начать обучение младших школьников комбинаторике, и рассмотрим процесс ее решения [4, с. 18–24].

В конце новогоднего утренника в зал внесли два ящика. В первом из них было помногу карточек красного, оранжевого, желтого, зеленого, голубого, синего и фиолетового цветов, а во втором — помногу карточек всех таких же цветов, а еще белого и черного. Каждый ребенок с завязанными глазами вынимал из каждого ящика по одной карточке. Тот, кто вынул из первого ящика, например, зеленую карточку, а из второго — синюю, получал в подарок зеленую коробку конфет и синюю коробку с цветными карандашами, а тот, кто из первого ящика вынул желтую карточку, а из второго — красную, получал желтую коробку конфет и красную коробку с цветными карандашами. Требуется подсчитать количество вариантов подарков.

– Это нетрудная задача: надо всего лишь не полениться составить список всех вариантов.

– Начнем: 1) красная коробка конфет и желтая коробка карандашей; 2) зеленая коробка конфет и синяя коробка карандашей; 3) фиолетовая коробка конфет и красная коробка карандашей…

– Наверное, для составления этого списка понадобится немало времени. Поэтому лучше пользоваться сокращенной записью. Например, такой: кр. конф. и жел. кар.

– А лучше – еще более короткой: к. конф. и ж. кар.

– Вид подарка определяется цветами карточек. Поэтому можно пользоваться таким видом записи: к. кар. и ж. кар.

– Можно писать еще короче: 1-к, 2-ж.

– Цифры 1 и 2 можно опустить, а вместо этого лучше писать так:

(к, ж). Ведь сам порядок записи букв «к» и «ж» показывает, какая из них соответствует цифре 1, а какая – цифре 2.

– Еще лучше писать так: кж.

– Эта форма записи намного удобнее, давайте воспользуемся ею. Перепишем в такой форме начало нашего списка и продолжим его: кж, зс, фс,...

– Надо следовать определенному порядку перечисления вариантов, который предотвратил бы повторения и пропуски возможных вариантов.

– Для этого естественно воспользоваться порядком, в котором назывались цвета карточек.

– Можно выбрать любой порядок перечисления цветов и следовать ему.

– Выбор порядка перечисления цветов равносилен выбору их нумерации.

– Так давайте занумеруем цвета карточек из первого ящика и цвета карточек из второго. И тогда вместо цветов карточек будем называть их номера.

– Совсем не обязательно фиксировать какую-нибудь из таких нумераций. Важно лишь то, что в первом ящике – карточки семи цветов, а во втором – девяти. И только этим определяется количество вариантов, т.е. количество пар цветов карточек.

– Иначе говоря, количество вариантов совпадает с количеством пар номеров (при какой-нибудь нумерации цветов карточек из первого ящика и какой-нибудь нумерации цветов карточек из второго).

– Пусть $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ – множество номеров цветов карточек из первого ящика, $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – множество номеров цветов карточек из второго ящика. Количество вариантов подарков равно количеству всевозможных пар (m, n), таких, что m – номер из A и n – номер из B.

– А поскольку каждый номер записывается с помощью одной цифры, удобней писать mn вместо «(m, n)».

– Иначе говоря, каждый вариант можно выражать двузначным числом.

– А значит, количество вариантов совпадает с количеством всевозможных двузначных чисел mn, таких, что $1 \leqslant m \leqslant 7$ и $1 \leqslant n \leqslant 9$.

– Таких чисел не очень много. Давайте выпишем их все и затем пересчитаем: 11, 12, 13, ..., 19, 21, 22, ...

– Но необходимо ли выписывать все эти числа и затем пересчитывать их для того, чтобы узнать, сколько их?

– Конечно же, нет. Можно воспользоваться тем, что таких двузначных чисел с первой цифрой 1 всего 9: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, столько же таких чисел с первой цифрой 2, столько же с первой цифрой 3 и т.д. Таким образом, мы имеем 7 групп чисел по 9 чисел в каждой. Значит, всего таких чисел $7 \cdot 9$, т.е. 63.

Вот оно – проявление «непрерывно совершающегося обратимого перевода информации с собственно психологического языка пространственно-предметных структур, т.е. языка образов, на символически-операторный язык» знаков. Вот он – творческий продукт, предстающий в наглядно-образной форме. На последующих этапах учебной деятельности ему предстоит выступить в знаковом облачении, которое не просто сохранит, но еще более подчеркнет его наглядно-образную форму и посредством этого еще более проявит несомое им содержательное обобщение.

– Эти числа можно расположить подобно местам в кинотеатре, если, например, первую цифру в записи каждого из них истолковывать как номер ряда, а вторую – как номер места в ряду:

11	12	13 ...	18	19
21	22	23 ...	28	29
...	...	... ...	...	
71	72	73 ...	78	79

В этой таблице 7 строк, а в каждой строке – по 9 чисел. Значит, всего в ней $7 \cdot 9$, или 63 числа. Столько же было и вариантов подарков.

– Итак, нам не понадобилось выписывать таблицу полностью. Ее можно представить и более короткой записью:

11 ... 19
... ...
71 ... 79

Ведь нам важно выразить лишь то, что в таблице 7 строк и что в каждой из них по 9 чисел.

Полученная таблица дает хорошее обозрение исследуемой совокупности всех возможных вариантов. Такое представление этой совокупности вместе с описанием пути, которым мы пришли к нему, может служить образцом решения многих комбинаторных задач и естественным средством «открытия» школьниками правила умножения, лежащего в основе их решения.

Рассмотренная выше задача, конечно же, имеет более короткое и не менее доступное для младших школьников решение, например, основанное на использовании графового моделирования. Но далеко не всегда более короткое или более совершенное (в собственно математическом смысле) решение является более эффективным учебным средством. Такое решение должно быть итогом процесса, направленного на восхождение к эффективному методу и одновременно служащего формированию стратегий поисковой деятельности. Подход к решению задачи и соответствующая ему тактика внимания, выражающаяся соответствующей формой моделирования, должны соответствовать этим целям.

Описанный **процесс многократных перекодирований** – это процесс движения ко все более совершенному знаковому представлению исследуемой ситуации, процесс, подготавливающий рождение творческого продукта – лексикографического упорядочения (воплощенного в десятичном представлении натуральных чисел) как продуктивной модели все той же ситуации. Табличное представление, дающее решение задачи, – это наглядно-образная форма передачи найденного содержательного обобщения; это такая знаковая форма, которая преображается в символ.

Продуктивность в данном случае состоит в том, что решение задачи выстраивается как процесс многократных перекодирований, направленный на формирование такого кодирования, которое позволяет обозреть изначально труднообозримое целое. Такого рода процессы являются эффективным средством обучения детей моделированию, однако возможность его использования появляется лишь при условии приобщенности детей к полимоделированию.

Следующая задача решается применением правила умножения. Но прежде чем учащиеся увидят связь этой задачи с правилом умножения, им предстоит открыть такой способ описания рассматриваемых комбинаторных ситуаций, такой способ их кодирования, который делает хорошо обозримой совокупность кодов всех таких ситуаций как целого.

Найти количество делителей числа 2310 = 2 · 3 · 5 · 7 · 11.

– Делителей у этого числа довольно много. Это 1, 2, 3, 5, 7, 11; это 2 · 3, 2 · 5, 2 · 7, 2 · 11; это 3 · 5, 3 · 7, 3 · 11; это 2 · 3 · 5, 2 · 3 · 7 и т.д.

– Как же найти количество всех делителей заданного числа, не осуществляя их прямого перебора? Может быть, нам сможет послужить подсказкой опыт решения предыдущей задачи?

– Решение предыдущей задачи о подарках, не использующее перебора, было найдено благодаря тому, что мы нашли такое единообразное представление всех возможных вариантов, которое сделало обозримой всю их совокупность.

– Кажется, я вижу способ, как это сделать здесь. Например, делитель 3 · 7 можно представить таблицей

2	3	5	7	11
–	+	–	+	–

Делитель 2 · 5 · 7 мы представим таблицей

2	3	5	7	11
+	–	+	+	–

Таблица

2	3	5	7	11
–	–	–	–	–

представляет такой делитель, который не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7, ни на 11, т.е. число 1, а таблица

2	3	5	7	11
+	+	+	+	+

представляет делитель 2 · 3 · 5 · 7 · 11, т.е. само данное число.

– Каждый делитель заданного числа может быть представлен такого рода таблицей, и притом только одной (числа 2, 3, 5, 7 и 11 простые, непредставимые как произведения отличных от них чисел, и каждый делитель нашего числа, не равный 1, характеризуется набором тех из них, на которые он делится).

– Каждая таблица такого рода представляет подходящий делитель этого числа.

– Следовательно, делителей этого числа столько же, сколько таких таблиц.

– Количество таких таблиц нетрудно найти с помощью правила умножения: первую ячейку второй строки можно заполнить двумя способами: вписыванием знака «–» или знака «+». То же верно для второй и последующих ячеек. Значит, заполнить вторую строку таблицы можно 2 · 2 · 2 · 2 · 2, т.е. 32 способами. Столько же будет таблиц. Столько же и делителей у числа 2310.

Использованный здесь способ кодирования, также представленный в наглядно-образной форме, едва ли оказался бы продуктивным до приобщения учащихся к правилу умножения. Являясь продуктом развития табличного способа, он заметно отличается от последнего. И это еще один аргумент в пользу раннего приобщения учащихся к полимоделированию. В то же время это и демонстрация того, что наглядно-образное мышление есть необходимый компонент процесса формирования продуктивной модели исследуемой ситуации.

Рассмотрим еще одну задачу:

Вычислить

$$200520052005 \cdot 200520052005 -$$
$$- 200520052004 \cdot 200520052006.$$

– Вычисление этого выражения потребует немало времени. А нельзя ли воспользоваться тем, что число 200520052004 на 1 меньше, чем 200520052005, а число 200520052006 – на 1 больше?

– Давайте для краткости обозначим число 200520052005 буквой а. Тогда наше выражение запишется так: $a \cdot a - (a - 1) \cdot (a + 1)$. *Оно равно* $a \cdot a - (a \cdot a - a + a - 1)$, *или* $a \cdot a - a \cdot a + a - a + 1$, *т.е. 1.*

Предложенное решение (вполне доступное для детей, обучающихся по системе Б.Д. Эльконина–В.В. Давыдова) получено путем схватывания и обыгрывания структуры данного

арифметического выражения, представленной подходящим алгебраическим выражением. Последнее использовано как продуктивная модель данного выражения, т.е. как модель способа решения задачи.

Обучение математике – это в конечном счете приобщение к концептуальному аппарату и «техническим» средствам математического моделирования, за которым стоит восхождение от освоения отдельных действий к деятельности по принципу от целого – к частям, от общего – к частному. Полнокровное приобщение к моделированию невозможно без широкого использования метода от сложного – к простому и его взаимодействия с методом от простого – к сложному, а значит, без отказа от квалификации последнего как непреложного дидактического принципа.

Говорят, что обучение математике в школе должно каждый день доказывать свою полезность для будущей жизни на живых примерах из реальной практики построением математических моделей реальных явлений и демонстрацией их продуктивности. Но продуктивно ли это? И реально ли? Ведь движение к практике осуществимо лишь посредством радикального отхода от непосредственно практических задач. Вот пример-метафора на этот счет: развитие космонавтики создало качественно новые возможности геологических исследований.

Отсюда же следует, что обращение к собственно математическим задачам может служить эффективным средством обучения математическому моделированию как средству решения прикладных задач*.

Не менее значимо то, что явное и системное использование моделирования в обучении математике, широкое применение полимоделирования, ведущее к обогащению эвристической базы, влекут за собой не только собственно математическое, но и общее умственное развитие учащихся.

Литература

1. *Веккер Л.М.* Психические процессы. Т. 2. – Л., 1976.

2. *Гальперин П.Я.* Развитие исследований по формированию умственных действий// Психологическая наука в СССР. Т.1. – М., 1969.

3. *Гурбатова Е.Р.* Роль допонятийных форм мышления в обучении детей математике // Педагогика. 2004. № 6.

4. *Когаловский С.Р.* Роль комбинаторных задач в обучении математике // Математика в школе. 2004. № 7.

5. *Лобок А.* Другая математика// Школьные технологии. 1998. № 6.

6. *Непомнящая Н.И.* Педагогический анализ и конструирование способов решения учебных задач // *Г. Щедровицкий, В. Розин, Н. Алексеев, Н. Непомнящая.* Педагогика и логика. – М., 1993.

7. *Чуприкова Н.И.* Умственное развитие и обучение. Психологические основы развивающего обучения. – М., 1995.

Сергей Рувимович Когаловский *– профессор, зав. кафедрой начального математического образования Шуйского государственного педагогического университета;*

Елена Романовна Гурбатова *– учитель начальных классов, завуч Кукаринской общеобразовательной школы, Лежневский район, Ивановская обл.*

* Обучать математическому моделированию в средней школе, показывать широкие возможности приложений математики следует, конечно же, не только на уроках математики. Для успешной реализации этой цели необходима работа по совершенствованию межпредметных связей как на методическом, так и на методологическом уровне. Эта работа нуждается в соответствующих психологических исследованиях. *(Примеч. авт.)*