Применение свойств делимости при решении задач в начальной школе

П.М. Зиновьев

На одной из олимпиад по математике в начальной школе была предложена следующая задача:

Заказ на 130 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий, если известно, что он за час делает на 3 детали больше?

Учителя начальных классов, присутствовавшие на олимпиаде, посчитали эту задачу неприемлемой для младших школьников – ведь это типичная задача для 8-го класса. Решить её можно алгебраическим способом. Пусть первый рабочий делает x деталей за час, тогда второй рабочий в час делает $x - 3$ детали. По условию задачи можно составить уравнение: $\frac{130}{x-3} - \frac{130}{x} = 3$, которое после несложных преобразований приводится к квадратному уравнению $x^2 - 3x - 130 = 0$ и имеет положительный корень $x = 13$. Следовательно, первый рабочий делает в час 13 деталей, а второй – 10. Конечно, такое решение нужно признать правильным, но отсюда вовсе не следует, что задача недоступна для решения третьеклассникам.

Заметим, что число 130 можно получить как произведение чисел 13 и 10. Предположим, что первый рабочий делает в час 13 деталей, тогда он выполнит заказ за 10 часов. Второй рабочий изготовит за час $13 - 3 = 10$ (деталей), а всю работу сделает за 13 часов, т.е. будет работать на 3 часа дольше. Условия задачи выполнены, следовательно, первый рабочий делает в час 13 деталей.

Можно сказать, что наше предположение оказалось очень удачным. А если не повезёт, что делать тогда? На самом деле предположение не случайно и почти единственно возможно. Оно следует из общего подхода к решению подобных задач. Этот подход опирается на свойства делимости натуральных чисел. Действительно, представим число 130 в виде произведения простых делителей: $130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$. Отсюда ясно, что 130 можно получить в качестве произведения четырьмя способами: $2 \cdot 65$, $10 \cdot 13$, $13 \cdot 10$, $65 \cdot 2$. Легко видеть, что 2 нельзя брать в качестве количества деталей, которые делает первый рабочий в час (тогда количество деталей, изготовляемое в час вторым рабочим, будет отрицательным числом). Не подходит и вариант 65, так как тогда частное $130 : 62$ не будет натуральным числом. Остаются два варианта: $10 \cdot 13$, $13 \cdot 10$. Первый тоже отбросим, поскольку в этом случае второй рабочий делает в час 7 деталей и время его работы $130 : 7$ также не выражается натуральным числом. Итак, предположение, заключающееся в том, что первый рабочий делает в час 13 деталей, оказалось единственно возможным и удовлетворяющим условию задачи.

Применяя указанный приём, можно решать довольно сложные задачи, в частности задачи на движение, которые вызывают у школьников значительные затруднения. Например:

Моторная лодка прошла против течения реки 143 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки 1 км/ч.

Представим число 143 в виде произведения: $143 = 11 \cdot 13$. Итак, скорость лодки против течения может быть равна 11 или 13 км/ч. Предположим, что она равна 11 км/ч, тогда на путь против течения лодка затратила 13 часов. По течению скорость лодки равна 13 км/ч, и на обратный путь ей потребуется 11 часов, т.е. на 2 часа меньше, как и говорится в условии задачи. Тогда собственная скорость лодки равна 12 км/ч. Предположение, заключающееся в том, что скорость лодки против течения 13 км/ч, приведёт нас к противоречию с условием задачи. Таким образом, мы получили ответ: 12 км/ч. Нужно отметить, что главная трудность состоит в том, чтобы найти делители числа 143, которыми являются 11 и 13, зато не приходится составлять довольно непростое уравнение, которое сводится к квадратному. Решение задачи доступно ученикам начальной школы, освоившим внетабличное умножение и деление.

Свойства делимости натуральных чисел в начальной школе в явном виде не изучаются, но многие из них доступны школьникам и используются при решении примеров и задач, например:

Для перевозки 222 школьников заказали несколько автобусов, вместимость которых выражается нечётным числом, заключённым между 30 и 50. Сколько автобусов заказали?

Эту задачу можно решать перебором нечётных чисел от 31 до 49. Однако есть и более интересный путь решения. Очевидно, число 222 делится на 111, а 111 имеет два простых делителя: 3 и 37. Число 37 и является количеством пассажиров в одном автобусе, а всего автобусов потребуется 6. В наших рассуждениях мы воспользовались свойством транзитивности делимости натуральных чисел: если натуральное число a делится на b и b делится на c, то a делится на c.

Часто при решении задач можно пользоваться признаками делимости:

На каждую машину грузили по 25 мешков сахара. Будут ли погружены все мешки, если их 350? Если мешков будет 412, сколько мешков будет не погружено?

В задаче не спрашивается, сколько машин потребуется, поэтому, отвечая на первый вопрос, вместо деления 350 на 25 можно воспользоваться признаком делимости на 25: число 350 оканчивается на 50 и, следовательно, делится на 25. 350 мешков можно погрузить на машины по 25 мешков на каждую. 412 не делится на 25; ближайшее число, которое делится на 25 и меньше 412, – это 400. Следовательно, не погрузят 12 мешков.

Приведём ещё один пример, который показывает, что с помощью признаков делимости письменные вычисления можно заменить устными рассуждениями:

Какие остатки при делении на 9 дадут числа 1725, 37 418, 4 532 046?

Вместо непосредственного и довольно громоздкого деления уголком данных чисел на 9 можно воспользоваться признаком делимости на 9: число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр в его десятичной записи делится на 9. В числе 1725 сумма цифр равна 15, а это означает, что число 1725 на 9 не делится. Найдём наибольшее число до 1725, которое делится на 9, – это 1719. Следовательно, остаток при делении 1725 на 9 будет равен 6. Можно было бы и не искать число 1719, а воспользоваться свойством: остаток от деления числа на 9 равен остатку от деления суммы цифр в его десятичной записи на 9. Отвечая на следующие вопросы задачи, найдём сумму цифр числа 37418 – она равна 23; разделим 23 на 9, получим остаток 5. В последнем случае, рассуждая аналогично, получим остаток, равный 6.

Нахождение наименьшего общего кратного позволяет решать задачи такого вида:

Экскурсантов можно посадить в лодки либо по 4 человека, либо по 5 человек в каждую. В том и другом случае свободных мест не будет. Сколько было экскурсантов, если их больше 30, но меньше 50?

Найдём наименьшее общее кратное чисел 4 и 5. Это число 20, но экскурсантов больше 20. Следующее общее кратное чисел 4 и 5 равно 40, оно и удовлетворяет условию задачи. При решении мы воспользовались свойством наименьшего общего кратного: любое общее кратное чисел делится на наименьшее общее кратное этих чисел.

В некоторых задачах приходится искать наибольший общий делитель:

20 апельсинов, 120 конфет и 30 пачек печенья разложили в одинаковые подарочные наборы поровну. Какое наибольшее число подарочных наборов можно сформировать? Сколько апельсинов, конфет и пачек печенья будет в каждом наборе?

Надо найти такое наибольшее число, на которое делятся без остатка числа 20, 120 и 30, т.е. надо найти наибольший общий делитель этих чисел. Таким числом будет число 10. Следовательно, можно сформировать 10 подарочных наборов, в каждом из которых будет 2 апельсина, 12 конфет и 3 пачки печенья.

Таким образом, знание свойств отношения делимости, признаков делимости, свойств наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя позволяет находить нетрадиционные способы решения задач.

Павел Михайлович Зиновьев *– канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры начального естественно-математического образования Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов.*